APÉNDICE C

DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LA EQUIVALENCIA ENTRE LOS PUNTOS CRÍTICOS DE LA FUNCIÓN $F_T(D)$ Y LA FUNCIÓN $V_p(D)$.

En el desarrollo del estudio estático de convertidores CA/CC con Reductor Activo de Armónicos se obtuvieron las expresiones necesarias para poder calcular la evolución de los principales parámetros del convertidor en condiciones estáticas. Parte de las relaciones obtenidas son comunes a todos los convertidores y otras son específicas para cada topología.

Dentro de las expresiones comunes, hay dos especialmente importantes que en el fondo definen el funcionamiento del RA^2. En primer lugar, podemos obtener el valor de la potencia consumida en función del ángulo de conducción de la corriente de entrada, de la tensión de entrada y del valor de la Resistencia Sin Pérdidas (R_{SP}) utilizada:

$$P_g = \frac{V_g^2}{2 \cdot \pi \cdot R_{SP}} \cdot \left(\phi_C - \mathrm{sen}(\phi_C)\right) \tag{C.1}$$

Por otra parte, podemos relacionar el valor de pico de la tensión de entrada V_g con la tensión en el condensador V_C, la tensión V_S y el ángulo de conducción de la corriente de entrada ϕ_C de la siguiente forma:

$$V_C - V_S = V_g \cdot \cos\left(\frac{\phi_C}{2}\right) \tag{C.2}$$

Como podemos comprobar, en ambas expresiones aparece el seno o el coseno del ángulo de conducción y además, en (C.1) aparece también el ángulo de conducción explícitamente. Esto implica que no va a ser posible obtener relaciones matemáticas explícitas siempre que en dicha expresión aparezca el ángulo de conducción ϕ_C. Esto es lo que ocurre al intentar obtener la relación entre la tensión de salida y la tensión de entrada en función del ciclo de trabajo.

Para obtener esta expresión, necesitamos conocer las funciones que relacionan las tensiones V_C y V_S con la tensión de salida V_p y con el ciclo de trabajo d. Cada convertidor tendrá expresiones distintas para estas dos relaciones:

$$V_C = V_p \cdot f_1(d) \tag{C.3}$$

$$V_S = V_p \cdot f_2(d) \tag{C.4}$$

Es decir, $f_1(d)$ y $f_2(d)$ serán distintas para cada tipo de convertidor. Sustituyendo (C.3) y (C.4) en (C.2) obtenemos:

$$V_p = V_g \cdot \cos\left(\frac{\phi_C}{2}\right) \cdot f_T(d) \tag{C.5}$$

donde $f_T(d)$ es una función que depende únicamente del ciclo de trabajo y en la que aparecerán como parámetros las relaciones de transformación de los devanados correspondientes a la salida principal (n) y a la salida retrasada (n_{SR}). Al depender de (C.3) y de (C.4), $f_T(d)$ también será específica para cada tipo de convertidor.

Como podemos comprobar, (C.5) relaciona la tensión de salida V_p con el valor de pico de la tensión de entrada V_g y el ciclo de trabajo d. Sin embargo, también aparece un parámetro más: el ángulo de conducción de la corriente de entrada ϕ_C. Nótese que el ángulo de conducción también está relacionado con el ciclo de trabajo ya que para una cierta carga y una tensión de entrada fija, al aumentar el ciclo de trabajo, en general también aumentará la tensión de salida y por tanto, la potencia consumida. Teniendo en cuenta (C.1), podemos deducir fácilmente que en ese caso, el ángulo de conducción también aumentará. Vemos por tanto que el ángulo de conducción también depende del ciclo de trabajo y así, en (C.5) la función $\cos\left(\frac{\phi_C}{2}\right)$ es una función implícita del mismo.

Esto implica que para estudiar la función $V_p(d)$ habrá que hacer uso del teorema de la función implícita pues, para obtener su derivada, no podemos considerar el ángulo de conducción como una constante, puesto que también depende implícitamente del ciclo de trabajo.

A partir del teorema de la función implícita, se puede deducir que si tenemos una función F(x, y) = 0, donde "y" depende implícitamente de "x", podemos obtener los puntos característicos de y(x) de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}} = 0 \qquad \text{(C.6)}$$

Nótese que para hallar $F'_x(x, y)$, consideraremos el parámetro "y" como una constante y que para hallar $F'_y(x, y)$, haremos lo mismo con la x.

Obtenemos el mismo resultado si diferenciamos la función F(x, y) e igualamos el resultado a cero, es decir:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \cdot dy = 0 \qquad \text{(C.7)}$$

Despejando ahora $\frac{dy}{dx}$, obtenemos la expresión (C.6).

Por tanto, el primer paso debe ser obtener la función $F(V_p,d) = 0$. Para simplificar el estudio, en nuestro caso obtendremos F(M, d), donde M es la relación:

$$M = \frac{V_p}{V_g} \qquad \text{(C.8)}$$

Nótese que V_g es una constante y por tanto, no afectará en absoluto al desarrollo matemático.

Para un cierto valor de carga R_L colocada a la salida, la potencia de salida será:

$$P_p = \frac{V_p^2}{R_L} \qquad \text{(C.9)}$$

Suponiendo un rendimiento unitario, podemos igualar la potencia de entrada (C.1) y la potencia de salida (C.9) y teniendo en cuenta (C.8), obtenemos:

$$M^2 = \frac{R_L}{2 \cdot \pi \cdot R_{SP}} \cdot \left(\phi_C - \mathrm{sen}(\phi_C)\right) \qquad \text{(C.10)}$$

A partir de (C.5) podemos obtener:

$$\phi_C = 2 \cdot \mathrm{ar}\cos\left(M \cdot f_T(d)\right) \qquad \text{(C.11)}$$

Sustituyendo (C.11) en (C.10) y operando la expresión resultante obtenemos:

$$M^2 = \frac{R_L}{2 \cdot \pi \cdot R_{SP}} \cdot \left(2 \cdot \mathrm{ar}\cos\left(M \cdot f_T(d)\right) - 2 \cdot M \cdot f_T(d) \cdot \sqrt{1 - M^2 \cdot f_T^2(d)}\right) \qquad \text{(C.12)}$$

Para simplificar un poco la expresión, llamaremos R_{eq} a:

$$R_{eq} = \frac{R_L}{2 \cdot \pi \cdot R_{SP}} \qquad \text{(C.13)}$$

Por tanto, la expresión de F(M, d) = 0 queda de la siguiente forma:

$$F(M, d) = M^2 - 2 \cdot R_{eq} \cdot \left(\mathrm{ar}\cos\left(M \cdot f_T(d)\right) - M \cdot f_T(d) \cdot \sqrt{1 - M^2 \cdot f_T^2(d)}\right) \qquad \text{(C.14)}$$

Para comprobar si la función $V_p(d)$ tiene algún punto característico debemos hallar su derivada e igualarla a cero $V'_p(d) = 0$, o lo que es lo mismo, M'(d) = 0. Aplicando el teorema de la función implícita podemos obtener esa derivada a partir de (C.14) sin conocer explícitamente M(d):

$$\frac{dM(d)}{dd} = -\frac{F_d^{'}(M,d)}{F_M^{'}(M,d)} = -\frac{\frac{dF(M,d)}{dd}}{\frac{dF(M,d)}{M}} = 0 \tag{C.15}$$

Derivando (C.14) respecto del ciclo de trabajo y tomando M como una constante, obtenemos:

$$F_d^{'}(M,d) = \frac{4 \cdot R_{eq} \cdot M \cdot f_T^{'}(d) \cdot \left(1 - M^2 \cdot f_T^2(d)\right)}{\sqrt{1 - M^2 \cdot f_T^2(d)}} \tag{C.16}$$

Si derivamos ahora respecto de M considerando constante el ciclo de trabajo, obtenemos:

$$F_M^{'}(M,d) = 2 \cdot \left(M \cdot \sqrt{1 - M^2 \cdot f_T^2(d)} + 2 \cdot R_{eq} \cdot f_T(d) \cdot \left(1 - M^2 \cdot f_T^2(d)\right)\right) \tag{C.17}$$

La función M(d) tendrá un punto crítico donde se cumpla (C.15). Analizando (C.16) y (C.17) vemos que el denominador de (C.15) se anula cuando se cumple:

$$M^2 \cdot f_T^2(d) = 1 \tag{C.18}$$

Por tanto, la derivada no será válida en este punto. Esto no es especialmente relevante ya que teniendo en cuenta (C.11), esta condición implica estar en punto de funcionamiento con un ángulo de conducción nulo, o lo que es lo mismo, con un consumo de potencia nulo. En el fondo, esta situación no se dará nunca en la práctica ya que el convertidor siempre consumirá algo para alimentar los circuitos de mando, las redes de protección y debido a los elementos parásitos del circuito.

Hecha esta aclaración y analizando la expresión del numerador, vemos que $F_d^{'}(M,d)$ se anula siempre que se anule $f'_T(d)$, es decir, la función M(d) tendrá un punto crítico siempre que lo tenga la función $f_T(d)$.

Por tanto, para estudiar la existencia de puntos críticos en la función de transferencia de la tensión de salida no es necesario conocer la función explícitamente. Simplemente tenemos que estudiar la función $f_T(d)$ y comprobar si ésta tiene algún punto crítico.

Del mismo modo, también podemos demostrar que para estudiar la naturaleza de dicho punto, simplemente tendremos que estudiar la segunda derivada de $f_T(d)$.

De esta forma, estudiar la controlabilidad de un convertidor con RA^2 resulta sumamente sencillo ya que la función $f_T(d)$ se obtiene fácilmente a partir de las expresiones que relacionan las tensiones V_C y V_S con la tensión de salida y con el ciclo de trabajo.